8C

УДК 519.6

Р.Г. Супроткін
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, м. Київ, Україна
roman.suprotkin@gmail.com

Тестування якості обчислення оцінки перетворення Фур’є фінітних функцій

У статті проведено тестування якості алгоритмів обчислення перетворення Фур’є на класах функцій, що задовольняють умову Ліпшиця, та відповідних їм інтерполяційних класів та показано підвищення якості обчислень шляхом занурення задачі в більш вузький клас. Були отримані апостеріорні оцінки точності для розглянутих тестових задач. Була підтверджена шляхом тестування якість квадратурних формул та апріорних оцінок їх точності. У статті наводяться фрагменти таблиць з результатами тестів.

Відомо, що розробка великих комплексів прикладних програм для розв’язування складних математичних задач – досить складна проблема. Після забезпечення загальної працездатності системи виникає задача дослідження цих систем з метою виявлення їх реальних показників якості та можливостей застосування в процесі оптимізації обчислень. Важливість ролі тестування алгоритмів-програм загалом та чисельного експерименту зокрема в цих процесах була обґрунтована в ряді праць [1], [2], крім того, комп’ютерна технологія розв’язання задач з підвищеною якістю [3] базується саме на результатах тестування алгоритмів-програм.

Перетворення Фур’є широко застосовується в цифровій обробці сигналів та зображень. Тому задача виявлення апостеріорних оцінок, як одного з резервів оптимізації, для алгоритмів обчислення перетворення Фур’є на різних класах задач шляхом тестування досить актуальна.

Відомо, що одним з резервів оптимізації є занурення задачі в більш вузький клас з максимальним використанням апріорної інформації. **Мета даної статті** – практична ілюстрація використання цього резерву оптимізації обчислень шляхом тестування.

Постановка задачі тестування

Дамо формальне означення оптимального за точністю алгоритму [4].

Нехай замість елемента I, що належить до множини вхідних даних задачі P, маємо скінченного виміру вектор $I_{N,\varepsilon} \equiv \left(\tilde{i}_1,...,\tilde{i}_N\right)$, а ε характеризує точність фактичних значень вхідних даних $I_N \equiv \left(i_1,...,i_N\right)$: $\left|i_j - \tilde{i}_j\right| \le \varepsilon,\ \ j = \overline{1,N}$. Позначимо $\tilde{R} = AI_{N,\varepsilon}$ – наближений розв’язок задачі $P\left(I,R\right)$, де $R \in \Re$ – точний розв’язок задачі, A – алгоритм, застосований до $I_{N,\varepsilon}$. Тоді абсолютною похибкою наближеного розв’язку задачі P буде $V\left(A,N,\varepsilon,P\right) = \rho_{\Re}\left(R,\tilde{R}\right)$. Введемо характеристики

$$V\left(A,N,\varepsilon,\mathrm{P}\right) = \sup_{P\in\mathrm{P}}\sup_{R\in\Re} V\left(A,N,\varepsilon,P\right);$$

$$V\left(M,N,\varepsilon,\mathrm{P}\right) = \inf_{A\in M} V\left(A,N,\varepsilon,\mathrm{P}\right);$$

$$V = V\left(N,\varepsilon,\mathrm{P}\right) = \inf_{A} V\left(A,N,\varepsilon,\mathrm{P}\right);$$

$$V\left(N,\mathrm{P}\right) = V\left(N,O,\mathrm{P}\right),$$

де Р – відповідно заданий клас задач *P, M* – множина алгоритмів *A* розв'язування задачі, а $V(N,\varepsilon,\mathrm{P})$ – нижня границя по всім алгоритмам *A*. Алгоритм *A,* на якому досягається $V(N,\varepsilon,\mathrm{P})$, назвемо оптимальним за точністю алгоритмом.

Якщо для алгоритму $\bar{A}$

$$V(\bar{A},N,\varepsilon,\mathrm{P})\le V(N,\varepsilon,\mathrm{P})+\eta,\quad \eta>0,$$

то $\bar{A}$ назвемо оптимальним за точністю з точністю до η. Якщо $\eta = o[V]$ або $O[V]$, то $\bar{A}$ назвемо відповідно асимптотично оптимальним або оптимальним за порядком.

Потрібно обчислити інтеграл від швидкоосцилюючої функції виду

$$I(\omega)=\int_a^b f(x)\sin(\omega x)dx, \tag{1}$$

де $f(x)\in F$ (F – деякий клас функцій), ω – довільне дійсне число, $|\omega|\ge\frac{2\pi}{(b-a)}$[1], інформація про $f(x)$ задається в N вузлових точках з $[a, b]$.

В роботі вибрані класи C_L (Ліпшиця) та відповідний йому інтерполяційний клас $C_{L,N}$, що є звуженням попереднього:

C_L – клас функцій $f(x)$, визначених на $[a, b]$ і таких, що задовольняють умову:

$$|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|,\quad x',x''\in[a,b]. \tag{2}$$

$C_{L,N}$ – клас функцій $f(x)\in C_L$ і заданий фіксованими значеннями f_i у вузлах фіксованої сітки x_i, $i=\overline{0,N-1}$.

Оптимальні за точністю квадратурні формули та апріорні оцінки похибки

Відповідно до теорем, доведених в [5], для класу Ліпшица оптимальною за точністю буде квадратурна формула

$$R(\omega)=\sum_{i=0}^{N-1} f_i\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\sin(\omega x)dx,\quad \text{де } x_{i\pm1/2}=x_i\pm\frac{\Delta x_i}{2} \tag{3}$$

і оцінка похибки

$$V(C_L,\omega)=\frac{4L}{\omega^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sin^2\left(\frac{\omega\Delta x_i}{4}\right)\left|\sin\left(\frac{\omega}{2}(x_i+x_{i+1})\right)\right|+P(\omega), \tag{4}$$

де

$$P(\omega)=\frac{L}{\omega}\left|\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\Delta x_{N-1}}{2}\right)\cos\left(\omega\left(1-\frac{\Delta x_{N-1}}{2}\right)\right)-(1-x_{N-1})\cos(\omega)\right|. \tag{5}$$

Для класу $C_{L,N}$ оптимальна квадратурна формула матиме вигляд:

$$R_1(\omega)=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x)\sin(\omega x)dx, \tag{6}$$

[1] Ця умова гарантує мінімум одне повне коливання $\sin(\omega x)$ на $[a, b]$.

де

$$f^*(x)=\begin{cases} f_i, & x_i \le x \le \overline{x_i}, \\ f_i + L(x-x_i)sign(\Delta f_i), & \overline{x_i} \le x \le \overline{\overline{x_i}}, \\ f_{i+1}, & \overline{\overline{x_i}} \le x \le x_{i+1}, \\ & x \in [x_{N-1}, x_N], \\ f_{N-1} & x_{N-1} \le x \le x_N \end{cases}$$

$$\overline{x_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{|\Delta f_i|}{2L}, \quad \overline{\overline{x_i}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{|\Delta f_i|}{2L}. \qquad (7)$$

Для похибки обчислення $I(\omega)$ на класі $C_{L,N}$ має місце оцінка знизу

$$V\left(C_{L,N}, \{f_i\}_0^{N-1}, \{x_i\}_0^{N-1}, \omega\right) \ge \begin{cases} \dfrac{4L}{\omega^2} \sum_{i=0}^{N-2} \left\{ \sin^2\left(\dfrac{\omega \Delta x_i}{4}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\omega|\Delta f_i|}{4L}\right) \right\} \times \\ \times \left| \sin\left(\dfrac{\omega}{2}(x_i + x_{i+1})\right) \right| + P(\omega), & N \ge |\omega|, \\ \dfrac{L}{\omega}\left\{ \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{\pi}{\omega+\pi} - \dfrac{4}{\omega} \sum_{i=0}^{[\omega/\pi]} \sin^2\left(\dfrac{\omega|\Delta f_i|}{4L}\right) \right\}, & N = \left[\dfrac{|\omega|}{\pi}\right] + 1, \end{cases} \qquad (8)$$

де $P(\omega)$ визначено в (5).

«Погана функція» класу матиме вигляд:

$$f^{\pm}(x) = \begin{cases} f_i \pm L(x - x_i) sign(\sin \omega x_i), & x \in [x_i, \overline{x_i}], \\ \dfrac{1}{2}((1 - sign(\Delta f_i))(f_i \pm L(x-x_i) sign(\sin \omega x_i)) + \\ + (1 + sign(\Delta f_i))(f_{i+1} \pm L(x_{i+1} - x) sign(\sin \omega x_i))), & x \in [\overline{x_i}, \overline{\overline{x_i}}], \\ f_{i+1} \pm L(x_{i+1} - x) sign(\sin \omega x_i), & x \in [\overline{\overline{x_i}}, x_{i+1}], \end{cases}$$

де $\overline{x_i}, \overline{\overline{x_i}}$ визначені в (7).

Тестування якості алгоритмів та оцінок їх характеристик

Для зручності програмування формули (3) і (6) подамо у вигляді

$$R(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \left(\cos(\omega x_{i-1/2}) - \cos(\omega x_{i+1/2})\right)$$

і

$$R_1(\omega) = \frac{1}{\omega}\Bigg(f_0 \cos(\omega x_0) + \sum_{i=0}^{N-1}\Big(L(\overline{x_i} - x_i) sign(\Delta f_i) \cos(\omega \overline{x_i}) - \\ -\left(f_i + L sign(\Delta f_i)(\overline{\overline{x_i}} - x_i) - f_{i+1}\right)\cos(\omega \overline{\overline{x_i}}) + \\ + \frac{L sign(\Delta f_i)}{\omega}\left(\sin(\omega \overline{\overline{x_i}}) - \sin(\omega \overline{x_i})\right)\Big) - f_N \cos(\omega x_N)\Bigg)$$

відповідно.

Тестування алгоритмів проводилося для сталих функцій, лінійних, кусково-лінійних, розглядалася «погана» задача класу $C_{L,N}$. Розглянемо деякі з них.

При тестуванні обчислювалися точне значення $I(\omega)$ та його наближення $R(\omega)$, $R_1(\omega)$. Обчислювалися оцінки похибок $V(C_l,\omega)$ і $V(C_{L,N},\omega)$ для класів C_L і $C_{L,N}$ відповідно. Обчислювалися **повні похибки** $E(\omega) = I(\omega) - R(\omega)$ та $E_1(\omega) = I(\omega) - R_1(\omega)$.

Приклад 1

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x<0, x>1,\\ 2x, & 0\le x\le 0,2,\\ -x+0,6, & 0,2\le x\le 0,4,\\ 0,2, & 0,4\le x\le 0,6,\\ 0,5x-0,1, & 0,6\le x\le 1\end{cases}\quad x\in[0,1].$$

Таблиця 1 – Результати тестів для функції $f_1(x)$

L	ω	N	$I(\omega)$	$V(C_L,\omega)$	$E(\omega)$	$V(C_{L,N},\omega)$	$E_1(\omega)$
2	800	800	2,26E – 04	3,90E – 04	2,41E – 04	2,82E – 04	1,13E – 06
2	800	1600	2,26E – 04	1,98E – 04	1,17E – 04	1,44E – 04	7,64E – 07
2	800	4000	2,26E – 04	7,98E – 05	4,53E – 05	5,79E – 05	5,63E – 07
2	800	8000	2,26E – 04	3,99E – 05	2,22E – 05	2,25E – 05	6,80E – 04
2	800	24000	2,26E – 04	1,33E – 05	7,05E – 06	3,38E – 06	6,74E – 04
2	800	80000	2,26E – 04	3,99E – 06	1,80E – 06	2,90E – 06	4,41E – 07
2	1000	1000	– 2,27E – 04	3,13E – 04	1,30E – 04	2,27E – 04	1,16E – 04
2	1000	2000	– 2,27E – 04	1,59E – 04	7,41E – 05	1,15E – 04	5,11E – 07
2	1000	5000	– 2,27E – 04	6,38E – 05	3,11E – 05	4,63E – 05	6,74E – 07
2	1000	10000	– 2,27E – 04	3,19E – 05	1,55E – 05	2,32E – 05	7,28E – 07
2	1000	30000	– 2,27E – 04	1,06E – 05	4,70E – 06	7,73E – 06	7,65E – 07
2	1000	100000	– 2,27E – 04	3,19E – 06	8,68E – 07	2,32E – 06	7,77E – 07

Приклад 2

$$f_2(x)=x\sin(x),\ x\in[0,2\pi]$$

Таблиця 2 – Результати тестування для функції $f_2(x)$

L	ω	N	$I(\omega)$	$V(C_L,\omega)$	$E(\omega)$	$V(C_{L,N},\omega)$	$E_1(\omega)$
2,5	800	800	4,73E – 04	7,40E – 03	4,73E – 04	7,40E – 03	2,54E – 03
2,5	800	1600	4,73E – 04	1,99E – 02	4,73E – 04	1,03E – 02	4,80E – 04
2,5	800	4000	4,73E – 04	1,11E – 02	4,73E – 04	7,30E – 03	4,67E – 04
2,5	800	8000	4,73E – 04	9,38E – 03	4,73E – 04	7,25E – 03	4,69E – 04
2,5	800	24000	4,73E – 04	8,05E – 03	4,73E – 04	7,34E – 03	4,72E – 04
2,5	800	80000	4,73E – 04	7,60E – 03	4,73E – 04	7,38E – 03	4,73E – 04
2,5	1000	1000	– 4,72E – 04	7,43E – 03	4,72E – 04	7,43E – 03	1,18E – 03
2,5	1000	2000	– 4,72E – 04	1,74E – 02	4,72E – 04	9,76E – 03	4,68E – 04
2,5	1000	5000	– 4,72E – 04	1,04E – 02	4,72E – 04	7,35E – 03	4,76E – 04
2,5	1000	10000	– 4,72E – 04	9,01E – 03	4,72E – 04	7,31E – 03	4,75E – 04
2,5	1000	30000	– 4,72E – 04	7,95E – 03	4,72E – 04	7,38E – 03	4,73E – 04
2,5	1000	100000	– 4,72E – 04	7,59E – 03	4,72E – 04	7,41E – 03	4,72E – 04

Приклад 3

Погана функція класу $C_{L,N}$ визначається значеннями $\{x_i\}$, $\{f_i\}$, L. Як значення $\{f_i\}$ візьмемо значення функції $f(x)=x\sin(x)$. Результати тестів подано в табл. 3.

Таблиця 3 – Результати тестування для функції $f(x)=x\sin(x)$

L	ω	N	$I(\omega)$	$V(C_L,\omega)$	$E(\omega)$	$V(C_{L,N},\omega)$	$E_1(\omega)$
2,5	800	800	4,73E – 04	7,40E – 03	4,73E – 04	7,40E – 03	2,54E – 03
2,5	800	1600	4,73E – 04	1,99E – 02	4,73E – 04	1,03E – 02	4,80E – 04
2,5	800	4000	4,73E – 04	1,11E – 02	4,73E – 04	7,30E – 03	4,67E – 04
2,5	800	8000	4,73E – 04	9,38E – 03	4,73E – 04	7,25E – 03	4,69E – 04
2,5	800	24000	4,73E – 04	8,05E – 03	4,73E – 04	7,34E – 03	4,72E – 04
2,5	800	80000	4,73E – 04	7,60E – 03	4,73E – 04	7,38E – 03	4,73E – 04
2,5	1000	1000	– 4,72E – 04	7,43E – 03	4,72E – 04	7,43E – 03	1,18E – 03
2,5	1000	2000	– 4,72E – 04	1,74E – 02	4,72E – 04	9,76E – 03	4,68E – 04
2,5	1000	5000	– 4,72E – 04	1,04E – 02	4,72E – 04	7,35E – 03	4,76E – 04
2,5	1000	10000	– 4,72E – 04	9,01E – 03	4,72E – 04	7,31E – 03	4,75E – 04
2,5	1000	30000	– 4,72E – 04	7,95E – 03	4,72E – 04	7,38E – 03	4,73E – 04
2,5	1000	100000	– 4,72E – 04	7,59E – 03	4,72E – 04	7,41E – 03	4,72E – 04

Відповідно до технології тестування [2] був проведений аналіз тестових таблиць. Результати тестування підтверджують, що занурення задачі в більш вузький клас дає можливість більш точно обчислити її розв'язок. Була підтверджена якість квадратурних формул та алгоритмів, що їх реалізують, а також теоретичних оцінок похибки методу.

За результатами тестувань можна зробити висновок, що точність на практичних задачах відрізняється в середньому на порядок від точності на «поганій» задачі класу.

При збільшенні числа вузлів вибірки точність спочатку зростає, але з досягненням деякого N_0 починає погіршуватися за рахунок накопичення обчислювальної похибки. Неспівпадання апостеріорної оцінки повної похибки з оцінками (4), (8) пояснюється врахуванням в апостеріорних оцінках похибки заокруглення.

Литература

1. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Задирака В.К., Бабич М.Д. К вопросу оптимизации вычислений // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 2. – С. 65-94.
2. Бабич М.Д., Задирака В.К., Сергиенко И.В. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – Ч. 1. – № 1. – С. 51-63.
3. Задірака В.К., Сергієнко І.В. Від наукового результату до комп'ютерної технології // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2008. – № 2. – С. 7-28.
4. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. – К.: Наукова думка, 1983. – 215 с.
5. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. – К.: Наукова думка, 1993. – 294 с.

Р.Г. Супроткин

Тестирование качества вычисления оценки преобразования Фурье финитных функций

В статье проведено тестирование качества алгоритмов вычисления преобразования Фурье на классах функций, соответствующих условию Липшица, и соответствующих им интерполяционных классах и продемонстрировано улучшение качества вычислений путем погружения задачи в более узкий класс. Были получены апостериорные оценки точности для рассмотренных тестовых задач. Подтверждено путем тестирования качество квадратурных формул и априорных оценок их точности. В статье приведены фрагменты таблиц с результатами тестов.

Roman Suprotkin

Fourier Transform Calculation Quality Testing of the Finite Functions

The testing of Fourier transform calculation algorithms quality in the classes corresponding the Lipshits condition and in the corresponding interpolation classes is presented; improvement of calculation quality by including a problem into a narrower class is demonstrated. A posteriori estimation of accuracy for examined problems was obtained. The quality of quadrature formulas and a priori estimates of their accuracy were confirmed with testing. There are shown fragments of tables containing the testing results.

Стаття надійшла до редакції 21.07.2008.